共通テスト（２０２３年度）　数学ＩＡ　模範解答

第１問

誘導になっているか
疑いながら解きましょう！

［１］

$$|x+6|\leqq 2 \iff -2\leqq x+6\leqq 2 \iff -8\leqq x\leqq -4$$

$|x+6|\leqq 2$ において，$x=(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ とすると

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6|\leqq 2 \iff -8\leqq(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)\leqq -4$$

$1-\sqrt{3}<0$ より　$\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}}\leqq(a-b)(c-d)\leqq\dfrac{-8}{1-\sqrt{3}}$

$$\frac{-4}{1-\sqrt{3}}=\frac{-4(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{-4(1+\sqrt{3})}{-2}=2+2\sqrt{3}$$

よって，$2+2\sqrt{3}\leqq(a-b)(c-d)\leqq 4+4\sqrt{3}$

$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ の両辺の引き算から

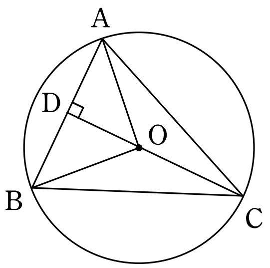
$$(a-b)(c-d)-(a-c)(b-d)=4+4\sqrt{3}-(-3+\sqrt{3})$$
$$ac-ad-bc+bd-(ab-ad-bc+cd)=7+3\sqrt{3}$$
$$ac-ab+bd-cd=7+3\sqrt{3}$$
$$a(c-b)-d(c-b)=7+3\sqrt{3}$$
$$(a-d)(c-b)=7+3\sqrt{3}$$

である。

両辺の足し算or引き算は、
予想している時間があったら
やってみた方が早いと思います。

［２］

(1)　(ｉ)　正弦定理より，$\dfrac{6}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\times 5$



$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{3}{5}$$

$\sin^2\angle\mathrm{ACB}+\cos^2\angle\mathrm{ACB}=1$ より，

$$\cos^2\angle\mathrm{ACB}=1-\left(\frac{3}{5}\right)^{2]}=\frac{16}{25}$$

$$\therefore\quad \cos\angle\mathrm{ACB}=\pm\frac{4}{5}$$

$\angle\mathrm{ACB}$ は鈍角なので　$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\dfrac{4}{5}$

2等辺三角形の頂点から底辺に下ろした垂線は
底辺を2等分する

(ii)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が $\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ の 2 等辺三角形，かつ点 O が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にあるとき。このとき，点 D は線分 AB の中点なので，

$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=3$ であり，$\mathrm{OA}=$半径$=5$ なので，$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

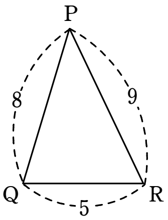
$$\tan\angle\mathrm{OAD}=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}=\frac{4}{3}$$

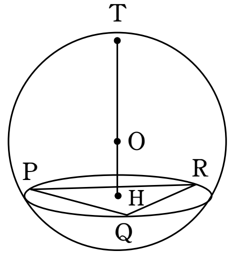
本来は(？)点 D が線分 AB の中点となるかどうかは
模解のように検証する必要がありますが、共テ本番で
は「たぶん通るでしょ？」くらいの勇気も必要かも！

このとき，△ABC の面積は　$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(OC+OD)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(5+4)=27$

(2)　余弦定理より

$$\cos\angle QPR=\frac{8^2+9^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{5}{6}$$





$$\sin^2\angle QPR+\cos^2\angle QPR=1$$

$$\sin^2\angle QPR=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\therefore\quad \sin\angle QPR=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

$(\because\ 0^\circ<\angle QPR<180^\circ)$

よって，△PQR の面積は　$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\sin\angle PQR=6\sqrt{11}$

三角錐 TPQR の体積が最大となるとき，点 O は線分 TH 上にある。

OP＝OQ＝OR＝球の半径 5，OH⊥PH，OH⊥QH，OH⊥RH より

△OPH≡△OQH≡△ORH

外接円の中心

よって，**PH＝QH＝RH** となり，点 H は△PQR の外心，PH は外接円の半径となる。

ゆえに，正弦定理より　$\frac{QR}{\sin\angle QPR}=2\times PH$

たぶん、こうなるでしょ！
と詳しく検証しないのも
作戦の１つ

$$\therefore\quad PH=\frac{5}{2\times\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

こういうテクニックも共テに限らず、
使えるといいですね♪

△OPH において，三平方の定理より

$$OH=\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}=\sqrt{5^2\left\{1-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2\right\}}=5\sqrt{\frac{2}{11}}$$

有理化も我慢！

三角錐 TPQR の体積は

$\sqrt{11}$ をカッコの中に分配, カッコの中を 5 でくくる

$$\frac{1}{3}\cdot(\triangle PQR\ の面積)\cdot TH=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\cdot\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$