共通テスト（２０２３年度）　数学ＩＡ　模範解答

第４問

(1)　462 と 110 を素因数分解した結果を利用

$462=2\times3\times7\times11$

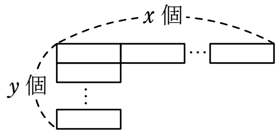
$110=2\times5\times11$

よって，462 と 110 を割り切る素数のうち最大のものは 11 である。

赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，

462 と 110 の最小公倍数なので　$\underline{2}\times3\times\underline{5}\times7\times\underline{11}=\underline{110}\times3\times7=2310$

赤い長方形を横に x 個，縦に y 個並べて作ることができる長方形の横の長さと縦の長さの差の絶対値は



$|462x-110y|=22|21x-5y|$ と表せる。正方形でないことから，$462x\fallingdotseq110y$　つまり　$|21x-5y|\fallingdotseq0$ である。

また，$|21x-5y|\geqq0$ であり，x，y が整数なので

$|21x-5y|$ は整数なので，$|21x-5y|\geqq1$ となる。

まとめると

① $|21x-5y|$ は 0 以上

② $|21x-5y|$ は整数

③ $|21x-5y|$ は 0 じゃない

$|21x-5y|$ の最小値って 1じゃない？

1となる x，y が存在すれば確定！

$x=1$，$y=4$ のとき，等号が成立することから，

$|462x-110y|$ は $x=1$　かつ　$y=4$ のとき，

最小値 $22\times1=22$

縦の長さが横の長さより 22 長いとき，

$110y-462x=22$

$\therefore\quad 5y-21x=1$

これを満たす自然数 x，y のうち，x が最小となる組を求めるので，

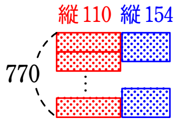
$$(x,\ y)=\left(1,\ \frac{22}{5}\right),\ \left(2,\ \frac{43}{5}\right),\ \left(3,\ \frac{64}{5}\right),\ (4,\ 17),\ \cdots$$

より，$(x,\ y)=(4,\ 17)$ である。よって，このときの横の長さは

$462\times4=1848$

(2)　図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，
110 と 154 の最小公倍数を求めれば良いので，
$110=2\times5\times11$，$154=2\times7\times11$ より，

$2\times5\times7\times11=770$



赤と青の横の長さがともに 33 の倍数なので，ここも 33 の倍数

$462=2\times3\times7\times11$ と $363=3\times11^2$ の最大公約数は

$3\times11=33$

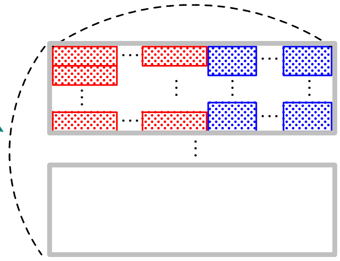
↓つまり，33 と 770 の最小公倍数

33 の倍数のうちで 770 の倍数である最小の正の整数は，
$33=3\times11$，$770=2\times5\times7\times11$ より，

$2\times3\times5\times7\times11=2310$

よって，図 2 のような正方形の 1 辺の長さは
2310 の倍数であることが必要。

770 の倍数



よって，図2のような正方形の1辺の長さは
33 の倍数かつ 770 の倍数，つまり，2310 の倍数

横一列に並べる赤い長方形と青い長方形の個数を
それぞれ p，q 個とするとき，

$462p+363q=2310r$　(p，q，r は自然数)

$14p+11q=70r$ ……… ①

正方形の辺の長さが最小となるのは，p，q，r がそれぞれ最小となるとき。
① より，$11q=14(5r-p)$ であるから，q は 14 の倍数であることが必要。
$q=14$ のとき，① は　$14p+154=70r \iff p+11=5r$ ……… ②
$p=4$，$r=3$ とすると ② は成立するので，$p=4$，$q=14$，$r=3$ のとき ① が成立する。
つまり，$p=4$，$q=14$，$r=3$ のとき，正方形の辺の長さが最小となり，その値は

$2310\times3=6930$