共通テスト（２０２３年度）　数学ⅡＢ　模範解答

第１問

［1］

(1)　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$\sin x<\sin 2x$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$\sin x=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 2x=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$\sin x>\sin 2x$

(2)　2倍角の公式より，$\sin 2x=2\sin x\cos x$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 2x-\sin x&=2\sin x\cos x-\sin x\\&=\sin x(2\cos x-1)\end{aligned}$$

$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つのは

「$\sin x>0$　かつ　$2\cos x-1>0$」　……………　①

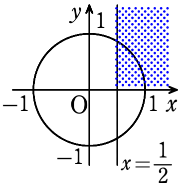
または

「$\sin x<0$　かつ　$2\cos x-1<0$」　……………　②

が成り立つのと同値である。

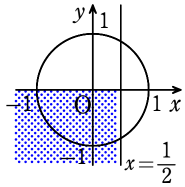
$$① \iff \begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad ② \iff \begin{cases}\sin x<0\\ \cos x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で ① を解くと



$0<x<\dfrac{\pi}{3}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で ② を解くと



$\pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$

以上より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x>\sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0<x<\frac{\pi}{3},\quad \pi<x<\frac{5}{3}\pi$$

である。

(3)　(問題文の誘導を要約すると, 和積の公式を用いる事となります)

和積の公式 $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ を用いると

$$\sin 4x-\sin 3x=2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$$

よって，$\sin 4x-\sin 3x>0 \iff 2\cos\dfrac{7}{2}x\sin\dfrac{x}{2}>0$

これと同値なのは

「$\cos\dfrac{7}{2}x>0$ かつ $\sin\dfrac{x}{2}>0$」 …………… ④

または

「$\cos\dfrac{7}{2}x<0$ かつ $\sin\dfrac{x}{2}<0$」 …………… ⑤

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$0\leqq\dfrac{x}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$

このとき，$\sin\dfrac{x}{2}\geqq 0$ であるから，⑤ は成立しない。 $\left(\sin\dfrac{x}{2}<0\text{ にならない}\right)$

(⑤が成立しないので、④だけを解きましょう！)

$$\sin\frac{x}{2}>0 \iff 0<\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{2} \iff 0<x\leqq\pi$$

また，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$0\leqq\dfrac{7}{2}x\leqq\dfrac{7}{2}\pi$

$$\cos\frac{7}{2}\pi>0 \iff 0<\frac{7}{2}x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\frac{7}{2}x<\frac{5}{2}\pi$$

$$\iff 0<x<\frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi$$

以上より，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\sin 4x>\sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0<x<\frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi$$

(4)　(2) において $x=2t$ とすると

「$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成立する x は　$0<x<\frac{\pi}{3}$，$\pi<x<\frac{5}{3}\pi$」

$\Leftrightarrow$「$0 \leqq 2t \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 4t > \sin 2t$ が成立する $2t$ は　$0<2t<\frac{\pi}{3}$，$\pi<2t<\frac{5}{3}\pi$」

$\Leftrightarrow$「$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき，$\sin 4t > \sin 2t$ が成立する t は　$0<t<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}<t<\frac{5}{6}\pi$」

よって，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 4x > \sin 2x$ が成立する x の値の範囲は

$0<x<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$ ……… ⑥

(3) より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 4x > \sin 3x$ が成立する x は

$\frac{\pi}{7}<x<\frac{3}{7}\pi$，$\frac{5}{7}\pi<x<\pi$ ……… ⑦

以上より，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つ x の範囲は，⑥ と ⑦ が同時に成りたつ x の範囲と同値なので

$\frac{\pi}{7}<x<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{7}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$

［2］

(1)　$a>0$，$a \neq 1$，$b>0$ のとき，$\log_a b = x$ とおくと，$a^x = b$

（i）　$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

底の変換公式より　$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$

（ii）　$\log_2 3$ を有理数と仮定し，自然数 p，q をもちて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ と表すとき，

$2^{\frac{p}{q}} = 3$ と表せ，両辺を q 乗すると　$2^p = 3^q$

左辺は偶数，右辺は奇数であるから矛盾するので，$\log_2 3$ は無理数である。

（iii）（ii）と同様に $\log_a b = \frac{p}{q}$ とおくと　$a^p = b^q$

a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数 のとき，左辺と右辺の偶奇が一致しないため矛盾するので，$\log_a b$ は無理数である。