

共通テスト（2023年度） 数学ⅡB 模範解答

第2問

[1]

(1) $y=0 \Leftrightarrow f(x)=x^2(k-x)=0 \Leftrightarrow x=0, k$

よって、 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0, 0)$ と $(k, 0)$ である。

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx = -x(3x - 2k)$$

$k > 0$ であることから、右のような増減表となるので、

$x=0$ のとき、 $f(x)$ は極小値 0

$x=\frac{2}{3}k$ のとき、 $f(x)$ は極大値 $\frac{4}{27}k^3$

| | | | | | |
|---------|-----|---|-----|-------------------|-----|
| x | ... | 0 | ... | $\frac{2}{3}k$ | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{27}k^3$ | ↘ |

(2) 右図のような断面において、相似な三角形の相似比から

$$x:9 = h:15 \Leftrightarrow 9h = 15x \Leftrightarrow h = \frac{5}{3}x$$

円柱の体積 V は

$$V = \pi \cdot x^2 \times (15 - h)$$

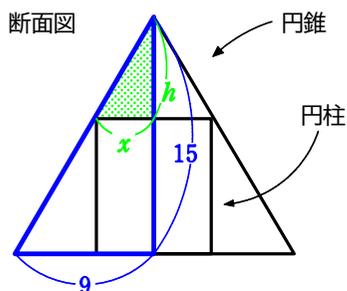
$$= \pi x^2 \left(15 - \frac{5}{3}x\right)$$

$$= \frac{5}{3} \pi x^2 (9 - x)$$

$$= \frac{5}{3} \pi f(x)$$

(1)において、 $k=9$ 、 $0 < x < 9$ とすると、 $f(x)$ は $x=6$ で最大値 108 をとるので、

V は $x=6$ で最大値 $\frac{5}{3} \pi \times 108 = 180 \pi$



| | | | | | |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | ... | 6 | ... | 9 |
| $f'(x)$ | (0) | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | (0) | ↗ | 108 | ↘ | (0) |

[2]

$$(1) \int_0^{30} \left(\frac{1}{5}x + 3 \right) dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + 3x \right]_0^{30} = \frac{1}{10} \cdot 30^2 + 3 \cdot 30 = 180$$

$$\int \left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \right) dx = \frac{1}{300}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + 5x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \text{ (i) } S(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{5}x + 3 \right) dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + 3x \right]_0^t = \frac{1}{10}t^2 + 3t$$

$$S(t) \geq 400 \Leftrightarrow \frac{1}{10}t^2 + 3t \geq 400 \Leftrightarrow (t-50)(t+80) \geq 0$$

$$t \geq 0 \text{ より } t \geq 50$$

つまり、ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから **50日後** となる。

(ii) 右図のように単調増加関数と同じ幅の

積分区間で定積分しているので、

$$\int_{30}^{40} f(x) dx < \int_{40}^{50} f(x) dx$$

$$\int_0^{30} f(x) dx = 180, \int_0^{40} f(x) dx = 115 \text{ より}$$

$$\int_0^{40} f(x) dx = \int_0^{30} f(x) dx + \int_{30}^{40} f(x) dx$$

$$= 180 + 115$$

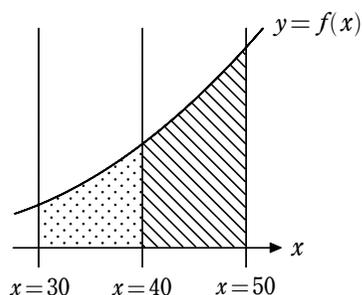
$$= 295$$

$$\int_0^{50} f(x) dx = \int_0^{40} f(x) dx + \int_{40}^{50} f(x) dx$$

$$> \int_0^{40} f(x) dx + \int_{30}^{40} f(x) dx$$

$$= 295 + 115$$

$$= 410$$



よって、 $\int_0^{40} f(x) dx < 400 < \int_0^{50} f(x) dx$ であるから、ソメイヨシノの開花日時は

2月に入ってから **40日後より後、かつ 50日後より前** となる。