共通テスト（２０２３年度）　数学ⅡＢ　模範解答

第４問

(1)　（方針1）

$$a_1=10+p$$

$$a_2=a_1\times 1.01+p=1.01(10+p)+p$$

$$a_3=a_2\times 1.01+p=1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1}=1.01a_n+p \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$\alpha=1.01\alpha+p$ ………② とおくと　$\alpha=-100p$

①−② より　$a_{n+1}-\alpha=1.01(a_n-\alpha)$

よって　$a_{n+1}+100p=1.01(a_n+100p)$

（方針2）

1 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

2 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-2}$ 万円になる。

n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより　$a_n=10\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-2}+\cdots+p$

$$=10\times 1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=\frac{1\cdot(1.01^n-1)}{1.01-1}=100(1.01^n-1)$

(2)

(10 年目)　10 年目の初め a_{10} ―――→ 10 年目の終わり $1.01a_{10}$

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であるとき，$1.01a_{10}\geqq 30$

(1) より，$a_{10}=10\times 1.01^9+p\times 100(1.01^{10}-1)$ であるから

$$10\times 1.01^{10}+p\times 101(1.01^{10}-1)\geqq 30$$

$$p\geqq\frac{30-10\times 1.01^{10}}{101(1.01^{10}-1)}$$

(3)　1 年目の入金を始める前における花子さんの預金が 10 万円から 3 万円増えているので，この 3 万円と 3 万円につく利息分が増加量となる。よって，n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $3\times 1.01^{n-1}$ 万円多くなる。