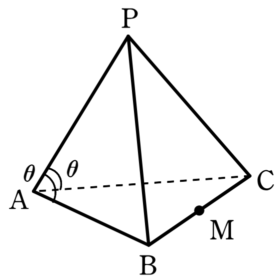
第５問

(1)　点 M は線分 BC の中点なので　$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

また，内積の定義から　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$　　$\therefore$　$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}=\cos\theta$

同様に　$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\cos\theta$



よって，$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\cos\theta$

(2)　$\theta=45°$，$|\overrightarrow{AP}|=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=3$ より，

$$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\cos 45°$$

$\therefore$　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=9$ ……… ②

点 D は直線 AM 上の点なので，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AM}=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$$

と表せる。$\angle APD=90°$ より，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=0$

$$(-\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=0$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AP}|^2$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}\right)=(3\sqrt{2})^2$$

$$\frac{t}{2}(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC})=18$$

$$\frac{t}{2}(9+9)=18 \quad (\because ②)$$

$$t=2$$

よって　$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$$

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$$

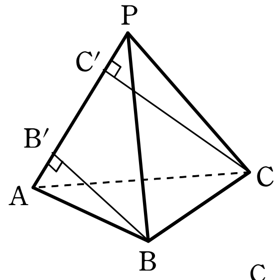
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

① より $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\fallingdotseq 0$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ ……… ③

(ii) $k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\fallingdotseq 0$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ ……… ④



これと ③ より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

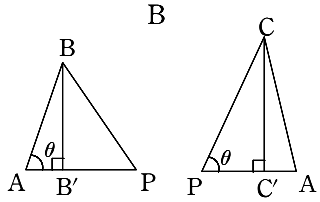
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=(k+1)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta$$

$$=(k+1)\mathrm{AB'}$$

よって，$\mathrm{AB'}:\mathrm{AP}=1:(k+1)$

ゆえに，$\mathrm{AB'}:\mathrm{B'P}=1:k$ ……… ⑤

次に ④ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$



これと ③ より $\dfrac{1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\left(1+\frac{1}{k}\right)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\left(1+\frac{1}{k}\right)\mathrm{AC'}$$

よって，$\mathrm{AC'}:\mathrm{AP}=1:\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$

ゆえに，$\mathrm{AC'}:\mathrm{C'P}=1:\dfrac{1}{k}=k:1$ ……… ⑥

⑤, ⑥ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点であることと同値。

特に $k=1$ のとき，B′ と C′ は線分 AP の中点と一致し，$\mathrm{BB'}\perp\mathrm{AP}$，$\mathrm{CC'}\perp\mathrm{AP}$ であることから，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，△PAB と △PAC がそれぞれ BP＝BA，CP＝CA を満たす二等辺三角形であることと同値。