ねこの数式 nanakoの『猫と気ままな数学生活』

これまでの内容の確認テスト!!【Ver：数Ⅰ三角比②】☆彡

1問目　$\triangle$ABC において，BC$=7$，CA$=5$，$\angle$BAC$=120^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　AB の長さを求めよ。

(2)　外接円の半径を求めよ。

～方針～

正弦定理，余弦定理のどちらを利用するかは，判断の仕方が無いわけではないのですが，
どちらが試しに利用してみて上手くいった方が正解で良いと思います。

～模範解答～

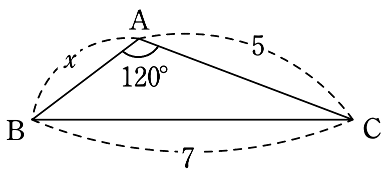
(1)　AB$=x\,(>0)$ とすると，余弦定理より

$$7^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\cos 120^\circ$$

$\therefore$　$x^2+5x-24=0$

$\therefore$　$(x+8)(x-3)=0$

$x>0$ より　$x=3=$AB



(2)　外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{7}{\sin 120^\circ}=2R$$

$$\therefore\quad R=\frac{7}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$ 答

2問目　△ABC において，BC$=\sqrt{6}$，∠B$=45°$，外接円の半径 $\sqrt{2}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　∠A の大きさを求めよ。

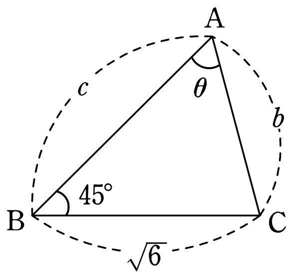
(2)　AC の長さを求めよ。

(3)　AB の長さを求めよ。

～方針～

(3) は 2 次方程式が因数分解できないので解の公式を利用します。意外と手が止まってしまう問題ですね。

～模範解答～



(1)　∠A$=\theta$ とすると，正弦定理より

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin\theta}=2\times\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<\theta<180°$ より　$\theta=30°,\ 150°$

ここで，三角形の内角の和は 180° なので

$\theta=150°$ のとき，$A+B=150+45°=195°>180°$ より不適。

よって，∠A$=\theta=$ **30°**　答

(2)　CA$=b$ とすると，正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 45°}=2\times\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad b=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{2}$$　答

(3)　AB$=c\ (>0)$ とすると，余弦定理より　$(\sqrt{6})^2=c^2+2^2-2\cdot c\cdot 2\cos 60°$

$$\therefore\quad c^2-2c-2=0$$

解の公式

$$\therefore\quad c=1\pm\sqrt{3}$$

$c>0$ より　$c=1+\sqrt{3}$　答

3問目　△ABC において，AB=4，BC=5，CA=7 であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　△ABC の面積を求めよ．

(2)　外接円の半径を求めよ．

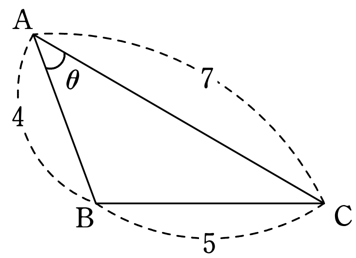
～方針～

(1) でヘロンの公式を利用するかどうかで，(2) の対応が少しだけ変わります。流れ 2 の方が楽ですが，問題の設定次第なので，どちらも出来るようにしておきましょう！

～模範解答～

【流れ1】

(1)　∠A=θ とすると，余弦定理より　$\cos\theta=\dfrac{4^2+7^2-5^2}{2\cdot4\cdot7}=\dfrac{5}{7}$



$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$

$\therefore\ \sin\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

$0°<\theta<180°$ より　$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

よって，△ABC の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\sin\theta=4\sqrt{6}$　答

(2)　外接円の半径を R とすると，正弦定理より　$\dfrac{5}{\sin\theta}=2R$

$$R=\dfrac{5}{2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7}}=\dfrac{35}{4\sqrt{6}}=\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$$　答

【流れ2】

(1)　ヘロンの公式より

$l=\dfrac{4+5+7}{2}=8$　(△ABC の面積)$=\sqrt{8\cdot(8-4)\cdot(8-5)\cdot(8-7)}=4\sqrt{6}$　答

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\cdot\sin A$　より　$4\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\sin A$　$\therefore\ \sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

外接円の半径を R とすると，…（以下，流れ 1 と同じ）

参考　AB=c，BC=a，CA=b，△ABC の面積を S，外接円の半径を R とすると

$$R=\dfrac{abc}{4S}$$

証明　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ より　$\sin A=\dfrac{2S}{bc}$　……①

正弦定理 より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ であるから，$R=\dfrac{a}{2\cdot\dfrac{2S}{bc}}=\dfrac{abc}{4S}$　($\because$ ①)