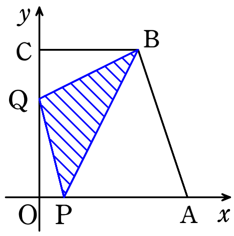
第２問

［１］

(1)　開始 1 秒後の 2 点 P，Q の座標は，P$(1,\ 0)$，Q$(0,\ 4)$ である。

このとき，



台形 OABC の面積は　$(4+6)\times 6\times\dfrac{1}{2}=30$

△OPQ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$

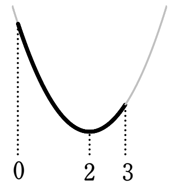
△PAB の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$

△QBC の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$

よって，△PBQ の面積は　$30-2-15-4=9$

(2)　開始 x 秒後 $(0\leqq x\leqq 3)$ の 2 点 P，Q の座標は，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 6-2x)$ である。

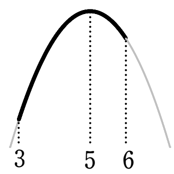
△PBQ の面積を S として，(1) と同様の方法で求めると



$$S=30-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(6-2x)-\frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2x$$
$$=x^2-4x+12$$
$$=(x-2)^2+8$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=0$ で最大値 12，$x=2$ で最小値 8 をとる。

(3)　開始 x 秒後 $(3\leqq x\leqq 6)$ の 2 点 P，Q の座標は，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 2(x-3))$ である。



$$S=30-\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2(x-3)-\frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\{6-2(x-3)\}$$
$$=-x^2+10x-12$$
$$=-(x-5)^2+13$$

$3\leqq x\leqq 6$ のとき，$x=5$ で最大値 13，$x=3$ で最小値 9 をとる。

(2) と合わせて考えると，$0\leqq x\leqq 6$ における S の最大値は 13，最小値は 8 である。

(4)　(2) と (3) より，$S=\begin{cases} x^2-4x+12 & (0\leqq x\leqq 3) \\ -x^2+10x-12 & (3\leqq x\leqq 6)\end{cases}$

$0\leqq x\leqq 3$ において，$S\leqq 10$ となるのは　$x^2-4x+12\leqq 10$

$\Longleftrightarrow\ x^2-4x+2\leqq 0$

$\Longleftrightarrow\ 2-\sqrt{2}\leqq x\leqq 2+\sqrt{2}$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$2-\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$

$3\leqq x\leqq 6$ において，$S\leqq 10$ となるのは　$-x^2+10x-12\leqq 10$

$\Longleftrightarrow\ x^2-10x+22\geqq 0$

$\Longleftrightarrow\ x\leqq 5-\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3}\leqq x$

$3 \leqq x \leqq 6$ より，$3 \leqq x \leqq 5-\sqrt{3}$

以上より，$2-\sqrt{2} \leqq x \leqq 5-\sqrt{3}$ であるから，△PBQ 面積が 10 以下となるのは

$$5-\sqrt{3}-(2-\sqrt{2})=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

〔2〕

(1)　(i)　図 1 から A の最頻値は階級 510 以上 540 未満である。

図 2 から

階級 270 以上 300 未満 の人数は 1 人

階級 300 以上 330 未満 の人数は 1 人　(ここまでで2人)

階級 330 以上 360 未満 の人数は 0 人　(ここまでで2人)

階級 360 以上 390 未満 の人数は 2 人　(ここまでで4人)

階級 390 以上 420 未満 の人数は 5 人　(ここまでで9人)

階級 420 以上 450 未満 の人数は 10 人　(ここまでで19人)

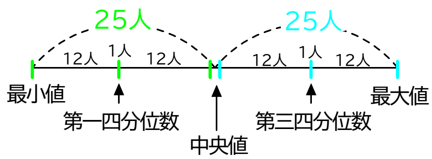
階級 450 以上 480 未満 の人数は 16 人　(ここまでで35人)

階級 480 以上 510 未満 の人数は 14 人　(ここまでで49人)

階級 510 以上 540 未満 の人数は 1 人　(ここまでで50人)

である。また，中央値は速い方から 25 人目と 26 人目の平均であるから，中央値が含まれる階級は 450 以上 480 未満である。

(ii)　それぞれの 13 番目に速い選手は第一四分位数を見れば良いので，



A の第一四分位数は，約 480秒

B の第一四分位数は，約 425 秒

よって，その差は，約 $480-435=45$ 秒

また，A の四分位範囲は，約 $530-480=50$

B の四分位範囲は，約 $485-435=50$

よって，その差は 約 $50-50=0$

ゆえに，A と B の四分位範囲の差は 0 以上 20 未満である。

(iii)　式と表 1 より，$296=454+z\times45$　　$\therefore\ z=-\dfrac{454}{45}=-3.51\cdots$

A についても同様に z を求めると，$z=-3.2$ であるから，ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の選手の方が優れている。

①

(2)　それぞれの散布図より，(a) は正，(b) は誤なので，①