第４問

(1)　$40=1\times6^2+0\times6^1+4=104_{(6)}$

よって，T6 には 104 と表示される。

$10011_{(2)}=\underline{1\times2^4}+0\times2^3+0\times2^2+\underline{1\times2^1+1}=\underline{1\times4^2}+0\times4^1+\underline{3}=103_{(4)}$

よって，T4 には 103 と表示される。

(2)　T4 の表示が 000 に戻る直前に表示されている数字は 333 である。$333_{(4)}$ に 1 を足した $1000_{(4)}$ を求めれば良いので

$1000_{(4)}=1\times4^3+0\times4^2+0\times4^1+0=64$ 秒後である。

T6 においても同様に考えると，$1000_{(6)}=6^3=216$ 秒後に 000 に表示が戻る。

よって，同時に表示が 000 に戻るのは，64 と 216 の最小公倍数を求めれば良い。

$64=2^6$，$216=2^3\times3^3$ より，$2^6\times3^3=1728$ 秒後

(3)　$12_{(4)}=1\times4^1+2=6$ より，ℓ を 64 で割った余りが 6 であることと同値。

T4 は 64 秒ごとに表示が 000 となる。表示が 012 となっているのは 6 秒後かもしれないし，$64+6=70$ 秒後かもしれません。なので，ℓ 秒後の表示が 012 となっているとき，ℓ から 64 秒ずつ除いていき，余った数が $12_{(4)}=6$ となっているはず…というわけです。

T3 の表示が 012 となるのは $12_{(3)}=1\times3^1+2=5$ 秒後

よって，m は 64 で割って 6 余る数であり，$3^3=27$ で割ると 5 余る数でもある。

整数 i，j を利用して，$m=64i+6=27j+5$ ……①

$$j=\frac{64i+1}{27}=2i+\frac{10i+1}{27}$$

j が整数となる i の 1 つは $i=8$ である。このとき，$j=19$

よって，$64\times8+6=27\times19+5$ ……②

①−② より，$64(i-8)=27(j-19)$

64 と 27 は互いに素なので，$i-8$ は 27 の倍数

n を整数として，$i-8=27n$　　$\therefore$　$i=27n+8$

i は 0 以上の整数なので，最小の i は $n=0$ のとき，$i=8$

このとき，$m=64\times8+6=518$

$12_{(6)}=6^1+2=8$ より，T4 と T6 の表示が同時に 012 となるときが存在すると仮定すると，先ほどと同様のことを考えて，$64i+6=6^3j+8$ が成立する整数 i，j が存在する。

このとき，

$$64i+6=6^3j+8 \iff 32i+3=108j+4 \iff 2(16i+1)+1=2(54j+2)$$

左辺と右辺の偶奇が一致しないことから矛盾。

よって，T4 と T6 の表示が同時に 012 となるときが存在することはない。③