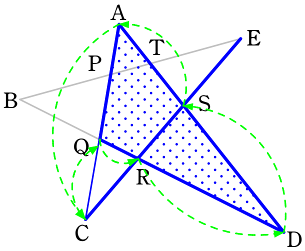
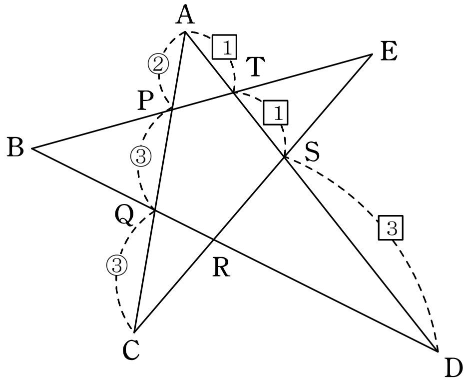
第５問

(1)　△AQD と直線 CE に注目すると



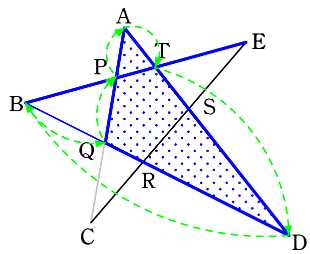


メネラウスの定理 より，$\dfrac{QR}{RD}\cdot\dfrac{DS}{SA}\cdot\dfrac{AC}{CQ}=1$

$DS:SA=3:(1+1)=2:3$，$AC:CQ=8:3$ より，$\dfrac{QR}{RD}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{8}{3}=1$　　∴ $\dfrac{QR}{RD}=\dfrac{1}{4}$

よって，$QR:RD=1:4$

また，△AQD と直線 BE に注目すると



$$\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AT}{TD}\cdot\frac{DB}{BQ}=1$$

$QP:PA=3:2$，$AT:TD=1:(1+3)=1:4$ より，

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{DB}{BQ}=1 \qquad ∴ \frac{DB}{BQ}=\frac{8}{3}$$

よって，$QB:BD=3:8$

したがって，$BQ:QR:RD=3:1:4$ となる。

(2)　5 点 P，Q，R，S，T が同一円周上にあるとし，$AC=8$ である。

(i)　$AT=x$ とすると，方べきの定理より，$PA\cdot AQ=TA\cdot AS \iff 2\times5=x\times2x$

これを解いて，$x=\sqrt{5}$

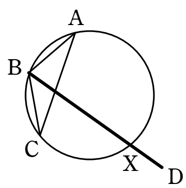
さらに，$QD\cdot DR=TD\cdot DS$ より，$DR=4\sqrt{3}$ となる。

(ii)　$AQ\cdot CQ=5\cdot3=15$ かつ $BQ\cdot DQ=5\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}=45$ より，

$AQ\cdot CQ<BQ\cdot DQ$ ……①

3 点 A，B，C を通る円と直線 BD の交点のうち，B と異なる点を X とすると，

方べきの定理より，$AQ\cdot CQ=BQ\cdot XQ$ ……② が成り立つ。



① と ② より，$BQ\cdot XQ<BQ\cdot DQ$

$BQ>0$ であるから，$XQ<DQ$

このことから，点 D は 3 点 A，B，C を通る円の外側にある。

また，△AQD と直線　BE に注目すると

(iii)　$CR=RS=SE=3$ のとき，$CS\cdot SE=6\times3=18$

また，$AS\cdot SD=2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$ であるから，$AS\cdot SD>CS\cdot SD$

(ii) と同様に考えると，A は 3 点 C，D，E を通る円の外側にあり，

$BR \cdot RD = 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 48$，$CR \cdot RE = 3 \times 6 = 18$ より，$BR \cdot RD > CR \cdot RE$
よって，B は 3 点 C，D，E を通る円の外側にある。